GV INVEST | 03

Revisitando o CAPM

Uma derivação simples do modelo fundamental para precificação de ativos

Novembro de 2016

Paulo Tenani[1][i]

O *Capital Asset Pricing Model,* ou CAPM, é o modelo de referência para a precificação de ativos financeiros. No entanto, ele está longe de ser um modelo trivial e sua demonstração nos principais livros textos de Finanças é, muitas vezes, bastante confusa, mais complicada do que necessário e com uma utilização exagerada de gráficos e figuras - o que torna a compreensão do modelo ainda mais difícil.

Além do mais, dependendo do livro de Finanças, as próprias hipóteses que supostamente seriam necessárias para a derivação do CAPM podem diferir. Por exemplo, um conjunto tradicional de hipóteses aventadas para a derivação do CAPM são as seguintes: (i) Existem muitos pequenos investidores que são tomadores de preço, (ii) Todos investidores são “Mean-Variance optimizers”, (iii) Os investimentos são todos feitos para um mesmo único período, (iv) Os investimentos são limitados ao universo dos ativos negociados publicamente, (v) Todos os investidores analisam os ativos da mesma maneira e tem a mesma visão econômica do mundo (vi) Os investidores podem emprestar ou pedir emprestado sem nenhuma restrição à taxa livre de risco, (vii) toda informação está disponível ao mesmo tempo para todos investidores.

O objetivo deste artigo é fazer uma derivação concisa do CAPM, ilustrando quais destas várias hipóteses são realmente necessárias e em que ponto exato da demonstração elas são utilizadas. O artigo tem quatro conclusões principais.

(1) A primeira é que o famoso resultado do CAPM, de que o excesso de Retorno Esperado de um determinado ativo é proporcional – ou, na linguagem do CAPM, um “beta” - do excesso de Retorno Esperado do Portfólio, não depende de nenhuma das hipóteses acima. Ela surge da aplicação de uma simples regra de três, em um modelo de três equações lineares. Ou seja, ao medir duas variáveis – como, por exemplo, o Retorno Esperado de um determinado ativo e o Retorno Esperado do Portfólio - em termos de uma terceira variável – como, por exemplo, o Retorno da taxa livre de risco - e depois comparar estes dois

resultados um com o outro, a conclusão sempre será a de que um dos resultados é um “beta” do outro. E isto independente de estarmos medindo Retornos Esperados, como no caso do CAPM ou, por exemplo, dias de chuva. A única coisa que muda é, obviamente, a formula do “beta”; esta sim dependendo exatamente de como tais variáveis são definidas.

(2) A segunda conclusão é que este excesso de Retorno Esperado, tanto de um determinado ativo quanto do Portfólio, pode ser calculado com relação a qualquer outro ativo do Portfólio e não necessariamente com relação à taxa livre de risco. Como já mencionado acima, a única coisa que muda é a formula do “beta”, que neste caso deve também considerar a covariância deste outro ativo não-livre-de-risco com o Portfólio.

(3) A terceira conclusão é que é possível derivar uma expressão análoga à do CAPM mesmo para o caso em que o Portfólio do investidor não seja o Portfólio de Mercado; Além do mais, mesmo neste caso, também seria possível medir o “beta” do ativo *i*, em termos do Portfólio do investidor e também em termos do Portfólio de Mercado – bastando, para tanto, um pequeno ajuste na fórmula do “beta”.

(4) A quarta conclusão é que a estrutura básica do CAPM é totalmente derivada de um modelo de equilíbrio parcial – em que leva-se em consideração tão somente as condições de primeira ordem de um único investidor representativo. Ou seja, a inclusão de múltiplos investidores, de expectativas homogêneas e de todo o lado da estrutura de mercado e da oferta de ativos – portanto equilíbrio geral – serve apenas para garantir a pouco realista conclusão de que todos os investidores detenham o Portfólio de Mercado. E resulta, na verdade, em um ganho muito pequeno para o CAPM: apenas uma pequena alteração na fórmula do “beta”.

O artigo é dividido da seguinte maneira. Na primeira seção, definimos o problema de maximização do investidor e resolvemos para as condições de primeira ordem. Estas condições são lineares - independendo da definição daquelas variáveis dentro da função utilidade. Na segunda seção ilustramos como o simples fato de subtrairmos duas das variáveis em termos de uma terceira e, então, medirmos cada uma destas variáveis uma em termos da outra, sempre resultará em uma relação de “beta” entre estes resultados. A terceira seção, por sua vez, define uma das variáveis dentro da função utilidade como sendo o Retorno Esperado do Portfólio e a outra como sendo a Variância do Portfólio. Então, deriva-se a equação do “beta” para o caso em que não exista um ativo livre de risco. A quarta seção precifica o Portfólio de Mercado em termos do Portfólio do investidor e deriva os ajustes necessários na expressão do “beta” para que neste caso - em que o Portfólio do investidor não é o de Mercado – seja também possível precificar um ativo em termos do Portfólio de Mercado. A quinta seção assume a existência de um ativo livre de risco e deriva a expressão do “beta” em termos do Portfólio do investidor para este caso específico. A sexta seção assume vários investidores atomísticos exatamente iguais ao investidor representativo e deriva a expressão do "beta" para o caso em que o Portfólio do investidor representativo seja também o Portfólio de Mercado. Este é justamente o CAPM tradicional como explicado nos livros textos. Finalmente, a sétima seção conclui.

1. O Problema do Investidor Representativo

O objetivo do investidor representativo é escolher um valor para a variável a_i, *i = 1, 2,.....,N* de maneira a maximizar uma função utilidade $U[E[R_p];\sigma_p^2]$ definida nas variáveis $E[R_p]$ e σ_p^2, respeitando a restrição de que $k = \sum_{i=1}^{N} a_i$. Na próxima seção definiremos as variáveis a_i, $E[R_p]$ *e* σ_p^2 como sendo, respectivamente, a alocação do ativo *i* no portfólio *P*, o Retorno Esperado do Portfólio *P* e a Variância do Portfólio *P* – com *N* sendo o número de ativos no Portfólio e *k* o grau de alavancagem do Portfólio.

Porém, o objetivo desta seção é o de apenas ilustrar alguns resultados típicos do *Capital Asset Pricing Model* que não dependem destas definições, mas apenas da estrutura linear das condições de primeira ordem.

O Lagrangiano para o problema do investidor representativo é dado por:

$$1)\quad L = U[E[R_p];\sigma_p^2] + \lambda\left(k - \sum_{i=1}^{N} a_i\right)$$

Onde λ é o multiplicador de Lagrange.

A solução ótima para cada variável a_i, *i = 1, 2,.....,N* é determinada pelo seguinte sistema de *N* equações de primeira ordem e respeitada a condição de que a soma de todas as alocações seja igual a *k*:

$$2)\quad U_1 \frac{\partial E[R_p]}{\partial a_i} + U_2 \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_i} = \lambda,$$

para i =1, 2 ,.......N

Onde U_1 e U_2 são, respectivamente, as utilidades marginais com relação à $E[R_p]$ e σ_p^2.

Ou seja, o investidor representativo estará modificando cada a_i, *i = 1, 2, ...,N* até o ponto em que seu ganho de utilidade, $U_1 \frac{\partial E[R_p]}{\partial a_i} + U_2 \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_i}$ seja exatamente o mesmo para todos. a_i, *i = 1, 2,.....,N,* e igual ao multiplicador de Lagrange *λ.*

2. A Estrutura Linear e o "beta"

Note que o sistema de *N* equações de primeira ordem descrito em 2) se aplica também para *i* = *F*, que em breve definiremos como sendo o ativo livre de risco. Portanto, para *i* = *F*:

$$3)\quad U_1 \frac{\partial E[R_p]}{\partial a_F} + U_2 \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_F} = \lambda,$$

Substituindo pelo multiplicador de Lagrange λ no sistema de *N* equações em 2) podemos reescrever as condições de primeira ordem em termos de "excedentes" com relação a *F*:

4) $U_1\left(\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_i}-\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_F}\right)=-U_2\left(\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_i}-\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_F}\right)$

para i =1, 2 ,.......N;

E esta equação 4) em particular, se aplica também para o ativo *P*, que em breve definiremos como sendo o próprio Portfólio. Ou seja

5) $U_1\left(\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_p}-\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_F}\right)=-U_2\left(\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_p}-\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_F}\right)$

Dividindo 4) por 5), cancelando as utilidades marginais U_1 e U_2 e rearranjando os termos, chegamos a seguinte expressão linear, relacionando o "excedente entre a derivada de $E[R_p]$ com relação a a_i, e a derivada de $E[R_p]$ com relação a a_F" com o "excedente entre a derivada de σ_p^2 com relação a a_P, e a derivada de σ_p^2 com relação a a_F":

6) $\left(\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_i}-\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_F}\right)=\beta_i\left(\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_p}-\frac{\partial E[R_p]}{\partial a_F}\right)$

E a expressão para β_i , que em breve definiremos como o "beta do CAPM" é dada por:

7) $$\beta_i=\frac{\left(\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_i}-\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_F}\right)}{\left(\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_p}-\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_F}\right)}$$

Dois pontos a notar com relação à expressão 6) – e ambos não dependendo de como serão definidas as variáveis $E[R_p]$ e σ_p^2. O primeiro ponto é que o "excedente entre a derivada de $E[R_p]$ com relação a a_i, e a derivada de $E[R_p]$ com relação à a_F" é linear no "excedente entre a derivada de σ_p^2 com relação à a_P, e a derivada de σ_p^2 com relação à a_F", com a constante de proporcionalidade sendo justamente β_i . Na próxima seção, quando definirmos $E[R_p]$ como sendo o Retorno Esperado do Portfólio, o ativo *F* como sendo a taxa livre de Risco e o ativo *P* como sendo o próprio Portfólio, este resultado se transformará em uma das conclusões tradicionais do *Capital Asset Pricing Model:* nomeadamente que o excesso de Retorno Esperado do ativo *i* com relação à taxa livre de risco é proporcional ao excesso de Retorno Esperado do Portfólio com relação à taxa livre de risco – com a relação de proporcionalidade sendo justamente dada pelo beta do ativo *i*, β_i.

O segundo resultado é que a expressão 6) não depende dos parâmetros da função utilidade do investidor representativo. Portanto, a relação entre os dois "excessos de Retorno Esperado" não depende dos gostos, ou da aversão a risco do investidor representativo. O que acontece é que - como tanto o "excedente de *i* com relação a *F*", quanto o "excedente de *P* com relação a *F*" são ambos funções da utilidade marginal do investidor representativo - esta utilidade marginal, então, acaba por se cancelar quando medimos um "excedente" em termos do outro.

Note que ambos estes resultados dependem simplesmente da regra de três que fizemos com as equações de primeira ordem em 2): primeiro usando o "excesso de *i* com relação a *F*" para substituir pelo multiplicador de Lagrange λ e depois medindo este "excesso de *i* com relação a *F*"" em termos do "excesso de *P* com relação a *F*"" justamente para eliminar as utilidades marginais. Estes resultados, portanto, independem das definições específicas das variáveis $E\left[R_p\right]$ e σ_p^2.

3. Definindo os argumentos da Função Utilidade

Podemos agora definir as variáveis $E\left[R_p\right]$ e σ_p^2, como sendo respectivamente o Retorno Esperado e a Variância de um Portfólio de *N* ativos, com alocação a_i, *i = 1, 2, ...,N.*

De estatística básica temos que o Retorno Esperado do Portfólio *P* com *N* ativos é dado por:

$$8)\quad E\left[R_p\right] = \sum_{i=1}^{N} a_i E[r_i]$$

Onde $E[r_i]$ é o Retorno Esperado do ativo *i* e a_i é a alocação do ativo *i* no portfólio, para *i = 1, ..., N.*

Enquanto que a Variância do Portfólio é dada por:

$$9)\quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} a_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_j \sigma_{i,j}$$

Onde σ_i^2 é a Variância do ativo *i, i = 1, ..., N* e $\sigma_{i,j}$ é a covariância entre o ativo *i* com o ativo *j,* com *i =1, ..., N* e *j =1, ..., N* e *j ≠ i* .

Podemos agora utilizar as formulas para o Retorno Esperado e a Variância do Portfólio para calcular as derivadas com relação à a_i , *i = 1, ..., N.* Temos que:

$$10)\ \frac{\partial E\left[R_p\right]}{\partial a_i} = E[r_i]$$

$$11)\ \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_i} = 2a_i\sigma_i^2 + 2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_j \sigma_{i,j}$$

para i =1, 2 ,.......N;

Note que as derivadas nas equações 10) e 11) se aplicam, inclusive, para o ativo *F* e o Portfolio *P.* Além do mais, note que a expressão em 11), $\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} a_j \sigma_{i,j}$ é justamente a covariância do ativo *i*, com o Portfólio *P*, para *i = 1, 2,....N* e, que, para o caso do Portfólio *P*, sua covariância consigo mesmo é a variância do Portfólio σ_p^2. Ou seja:

$$12)\ \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_i} = 2\sigma_{i,P}\ \text{, para } i = 1, 2,.....N$$

$$13)\ \frac{\partial \sigma_p^2}{\partial a_p} = 2\sigma_P^2\text{, para } i = P$$

Substituindo nas equações 6) e 7) temos que:

$$14)\ E[r_i - r_F] = \beta_i E\left[r_p - r_F\right]$$

Que é a expressão tradicional do *Capital Asset Pricing Model* relacionando o excesso de Retorno Esperado do ativo *i* com relação ao ativo *F* como sendo igual a um ”beta” do excesso de Retorno Esperado do Portfolio com relação ao ativo *F*.

A expressão para o beta do ativo *i* é dada por:

$$15)\ \beta_i = \frac{\left(\sigma_{i,P} - \sigma_{F,P}\right)}{\left(\sigma_P^2 - \sigma_{F,P}\right)}$$

Uma coisa a notar sobre as expressões 14) e 15), é que elas não dependem da existência de um ativo livre de risco. Ou seja, a equação linear entre os excessos de Retorno Esperado do ativo *i* em termos do excesso de Retorno Esperado do Portfólio, pode ser definida em termos de qualquer ativo, e não somente do ativo livre de risco.

Na verdade, a única diferença entre estes dois casos estaria na fórmula do "beta" - com a formula do "beta" na ausência de um ativo livre de risco sendo dada justamente pela expressão 15) acima; enquanto que a formula do "beta" na presença de um ativo livre de risco será calculada na seção 5).

4. Precificando o Portfólio de Mercado em termos do Portfólio

.Para o caso em que o ativo *i* seja o Portfólio de Mercado *M,* a equação 15) nos da o "beta" do Portfólio de Mercado em termos do Portfólio de ativos do investidor. Isto é:

$$16)\ \beta_M = \frac{\left(\sigma_{MP} - \sigma_{F,P}\right)}{\left(\sigma_P^2 - \sigma_{F,P}\right)}$$

E note que, para o caso em que o Portfólio *P* do investidor é exatamente o Portfólio de Mercado *M* – o que acontece apenas mediante a uma série de hipóteses específicas como veremos na seção 6) - o valor de β_M é igual a 1.

Além do mais, das equações 14), 15) e 16), podemos também precificar, um determinado ativo *i* em termos do Portfólio de Mercado *M* - ao invés de em termos do Portfólio *P* do investidor. Ou seja:

$$17)\ E[r_i - r_F] = \left(\frac{\beta_i}{\beta_M}\right) E[r_M - r_F]$$

Isto é, se o investidor possui um Portfólio *P* que não é o Portfólio de Mercado, e mesmo assim queira medir o excesso de retorno do ativo *i* com relação ao Portfólio de Mercado *M* – ao invés de seu próprio Portfólio *P* – então o "beta" do ativo *i* com relação ao Portfólio de Mercado seria justamente a relação entre o "beta" deste ativo com relação ao Portfólio *P*, dividido pelo "beta" do Portfólio de Mercado com relação ao Portfolio *P*.

Portanto, substituindo por 15) e 16) e cancelando os denominadores em comum, chegaríamos a seguinte expressão para o excesso de retorno do ativo *i*, em termos do excesso de retorno do Portfólio de Mercado *M* – para o caso em que o Portfólio do investidor não seja o Portfólio de Mercado:

$$18)\ E[r_i - r_F] = \frac{\sigma_{MP} - \sigma_{F,P}}{\sigma_{MP} - \sigma_{F,P}}\ E[r_M - r_F]$$

5. Definindo a Taxa Livre de Risco

Uma vez que o ativo *F* seja definido como livre de risco, a expressão para o "beta" do ativo *i* como definida em 15) adquire sua formula tradicional. Na verdade, se *F* é livre de risco, ele tem zero volatilidade e sua covariância $\sigma_{F,P}$ também é igual a zero. Substituindo em 15) temos que:

$$19)\ \beta_i = \frac{\sigma_{i,P}}{\sigma_P^2}$$

Note que a expressão em 19) já esta muito próxima da expressão tradicional para o "CAPM beta", nomeadamente que o "beta" é a relação entre a covariância do ativo *i* com o Portfólio de Mercado e a variância do Portfólio de Mercado. O que falta é a apenas mostrar em que condições o Portfólio *P* é o Portfólio de Mercado. São justamente estas condições – muito pouco realistas - que requerem a grande maioria daquelas sete hipóteses enumeradas no início deste artigo.

6. Equilíbrio Geral

Para que o Portfólio *P* do investidor representativo seja o Portfólio de Mercado *M* precisaremos assumir que todos os outros investidores resolvam um problema exatamente igual ao do investidor representativo. Ou seja, todos os outros investidores são também “Mean-Variance optimizers” e se defrontam com a mesma Matriz Variância-Covariância. Neste caso, as equações 14) e 19) seriam exatamente as mesmas do CAPM. Ou seja:

$$20)\ E[r_i - r_F] = \beta_i E[r_M - r_F]$$

$$21)\ \beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

Note que a maioria das hipóteses enumeradas na introdução deste artigo – especificamente as que se referem a vários investidores atomísticos, com a mesma visão econômica de mundo e com expectativas homogêneas – são tão somente necessárias para derivar que o Portfólio do investidor seja exatamente o Portfólio de Mercado.

São hipóteses que, a meu ver, são irrealistas, pois assumem que todos investidores são exatamente iguais para que, desta forma, possuam o mesmo Portfólio que, portanto, deverá ser o Portfólio de Mercado.

Se o objetivo fosse simplesmente medir a contribuição de um determinado ativo em termos do próprio Portfólio do investidor, como é feito nas equações 14), 15) acima, nenhuma destas hipóteses seria necessária. Além do mais, como ilustrado na seção 4), mesmo que o Portfólio do investidor não seja o Portfólio de Mercado, mas ele queira precificar um determinado ativo em termos do Portfólio de Mercado, isto pode ser feito com uma simples alteração na equação do “beta”, como ilustrado na equação 16) - sem a necessidade das inúmeras hipóteses irrealistas necessárias para que cada investidor detenha ele mesmo o Portfólio de Mercado.

7. Conclusão

A principal conclusão do *Capital Asset Pricing Model* é que o excesso de Retorno Esperado de um determinado ativo com relação à taxa livre de risco é uma proporção “beta” do excesso de Retorno Esperado do Portfólio de Mercado com relação à taxa livre de risco. Com esta conclusão simples, porém nada trivial, o CAPM revolucionou a prática de Finanças e tonou-se o modelo fundamental de precificação dos ativos financeiros.

No entanto, as demonstrações do CAPM, como feitas na maioria dos livros textos, tendem a ser mais complicadas e menos transparentes do que seria estritamente necessário, com um abuso do uso de gráficos, mas com pouquíssimo uso de equações. Este artigo tenta justamente suprir esta deficiência e procura derivar o CAPM de uma maneira intuitiva, com apenas o uso de equações e sem nenhuma utilização de gráficos.

O artigo procura também deixar claro em que momentos da demonstração do CAPM, as usuais hipóteses são necessárias. A conclusão é que a relação de ”beta” entre os excessos de Retorno Esperado de duas variáveis, não depende de nenhuma das hipóteses do CAPM, mas de apenas uma simples regra de três. No entanto, as hipóteses do CAPM entram na especificação exata da fórmula deste “beta” – que adquire especificações diferentes quando não existe um ativo livre de risco ou quando os ativos são medidos em termos do Portfólio do investidor, ou em termos do Portfólio de Mercado.

Na verdade, a grande maioria das hipóteses tradicionais do CAPM – e notadamente as menos realistas - são utilizadas justamente para mostrar que o Portfólio do investidor é o Portfólio de Mercado. Para tanto simplesmente assume-se que todos os investidores são iguais de tal maneira que todos os Portfólios destes investidores sejam exatamente os mesmos. E, com estas hipóteses, quase que por definição, o Portfólio de cada investidor é o Portfólio de Mercado.

Uma versão mais simples do CAPM, em que “o excesso de Retorno Esperado de um determinado ativo com relação a algum outro ativo” seja uma proporção “beta” do “excesso de Retorno Esperado do Portfólio do investidor com relação a este mesmo ativo” – ao invés de especificar uma taxa livre de risco ou que o Portfólio do investidor seja o Portfólio de Mercado – possivelmente seria ainda tão contundente e brilhante quanto à versão tradicional do CAPM. Porém, seria, com certeza, muito mais intuitiva e muito mais simples de ser demonstrada do que a versão tradicional - como este artigo espera ter demonstrado. .

Ou seja, as conclusões básicas do CAPM necessitam apenas de duas hipóteses: a de que o investidor seja “Mean-Variance optimizer” e que o investimento seja feito para um único período. Isto, por si só, já garante a estrutura linear que caracteriza as condições de primeira ordem; o que, por sua vez, garante uma relação proporcional de “beta” entre quaisquer dois ativos do Portfólio. Neste sentido, a conclusões básicas do CAPM não dependem, nem da existência de uma taxa livre de risco ou que o Portfólio de todos investidores seja o Portfólio de Mercado.

[1] Paulo Tenani, Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas.

[i] [i] Gostaria de agradecer Roberto Barbosa Cintra, João Lidio Bisneto, André Sanchez Pacheco, Roberto Amaral dos Santos, Vinicius Esposito, Martin Rahal e os demais membros do Grupo de Monetária e Finanças do Centro de Estudos GV Invest da EESP-FGV. *N*