GV Invest
Short Studies Series

GV INVEST | 04

# Probabilidades objetivas versus probabilidades "Risk-neutral"

*Para evitar arbitragem, os preços dos derivativos têm que ser calculados via probabilidades que pertencem a um espaço de probabilidade "risk-neutral", enquanto os agentes de mercado apostam utilizando um espaço de probabilidade objetivo (ou do mundo físico). Relacionar ambos estes espaços é relevante para se entender o que está sendo precificado nos preços dos ativos.*

Novembro de 2016

**Roberto Cintra[1]**

**Arbitragem**

Uma característica de um mercado eficiente é que nenhuma estratégia de *trading* consegue tornar zero em algo de valor positivo sem que se corra o risco de transformá-lo num valor negativo; caso contrário, diz-se que haveria a possibilidade de arbitragem. Assim, o conceito acadêmico de arbitragem é ter a chance de ganhar sem o risco de perder.

Imagine-se, por exemplo, um ativo que, daqui a 1 ano valerá 120 ou 150. Se a taxa de juro de 1 ano é de 20% e o valor do ativo hoje é 100, então o mesmo dá uma chance de arbitragem... tome R$100 emprestado e compre o ativo. Daqui a 1 ano, na pior das hipóteses, o ativo valerá R$120 e você poderá pagar sua dívida corrigida pelos juros no período. Na outra única alternativa, o ativo valerá R$150 e você pagará sua dívida e ganhará R$30. Numa situação assim, o melhor a fazer é tomar o maior empréstimo possível e comprar o máximo que conseguir deste ativo. Uma arbitragem é, desse modo, algo espetacular e quanto mais você conseguir alavancar para efetuá-la, melhor!

**Não-Arbitragem**

Se, por um lado, todos desejam "arbitrar", no sentido de realizar uma arbitragem, por outro lado, ninguém deseja ser "arbitrado". Afinal, quem gostaria de, sempre, na melhor das hipóteses, empatar?

No limite, usando o raciocínio do parágrafo anterior, o mais provável é não haver arbitragens, porque se todos as buscam, então elas não existem ou, se existirem, durarão pouco tempo.

Há um "mundo" fictício no qual todos os ativos, ou melhor, todos instrumentos financeiros, apresentam o mesmo retorno esperado. Neste mundo paralelo, tanto faz uma carteira de ações ou títulos do Tesouro, o retorno esperado é exatamente o mesmo e, assim, não é possível ganhar nem perder e, portanto, é livre de arbitragem! Nesse mundo, a medida de probabilidade é ajustada, de modo que, a equivalência dos retornos esperados acontece; diz-se que tal medida é "Risk-neutral".

Fischer Black e Myron Scholes, no seminal "The pricing of Options and Corporate Liabilities", numa das etapas cruciais do desenvolvimento do seu famoso modelo, chegam à conclusão de que o retorno esperado da posição com hedge <u>tinha que</u> ser o juro de curto prazo (ou seja, livre de risco).

A rigor, para qualquer derivativo, o paradigma de apreçamento é exatamente o de que o retorno esperado, no espaço de probabilidade neutro ao risco, é a taxa de juro de curto prazo.

**Não-Arbitragem no Mercado de Juros futuros**

O Banco Central do Brasil(BC), assim como muitos outros bancos centrais pelo mundo, segue um regime de metas de inflação. Assim, o BC define a taxa de juro de curto prazo "a taxa SELIC", em reuniões de seu comitê de política monetária (COPOM).

Na BM&F, há um dos mercados futuros de taxas de juros mais ativos em todo o mundo – os DIs futuros –no qual os "players" ou buscam "hedge", para suas exposições em taxas de juros nominais, ou fazem seu posicionamento/especulação, considerando suas expectativas quanto à trajetória dos juros de curto prazo.

Os preços de Mercado para os derivativos, aí incluídos os DIs futuros, são definidos num espaço de probabilidade neutro ao risco (Shreve, 2003), implicando que o retorno esperado é a taxa de juro livre de risco, que seria o CDI[2] no Brasil. Desse modo, simetricamente, qualquer probabilidade diretamente obtida a partir desses preços é, necessariamente, uma medida neutra ao risco, com as respectivas consequências. Em particular, para o DI futuro, recente trabalho de Silva (2016) discute as trajetórias implícitas das taxas de juros nesta medida neutra.

Para exemplificar, escolhe-se um contrato futuro em que há apenas uma reunião do COPOM entre a data atual e o vencimento do referido contrato. Com tal escolha, a taxa de curta prazo definida pelo comitê de política monetária, definirá o preço do futuro. Admitindo-se, simplificadamente, que o COPOM só tem duas opções, automaticamente implica que o valor, no vencimento, dos contratos futuros de taxas de juros, pode ser modelado como um evento binário[3]:

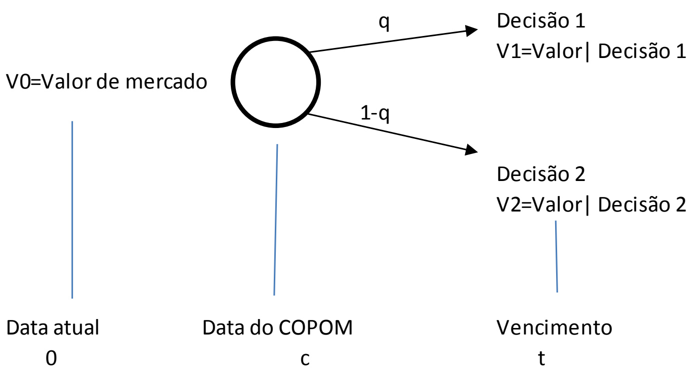


Figura 1: Visão esquemática da formação de preço do primeiro contrato de taxas futuras.

Considerando a Figura 1, tem-se que o valor do contrato depende, num contexto livre de risco, da taxa de juro de curto prazo em vigor $(j_0)$ e da taxa a ser definida na próxima reunião $(j_1)$; em outras palavras, os juros acumulados entre hoje e o vencimento do contrato dependem dos juros vigentes e daqueles do período pós-reunião:

$$(1+j)^t = (1+j_0)^c \times (1+j_1)^{t-c} \qquad (1)$$

$$\therefore j_1 = \frac{(1+j)^{\frac{t}{t-c}}}{(1+j_0)^{\frac{c}{t-c}}} - 1 \qquad (2)$$

De forma mais geral, o preço de mercado de um instrumento "V", $V_0$ depende da esperança matemática do seu valor num prazo "t":

$$V_0 = E_Q\left[e^{-\int_0^t r(\xi)d\xi} V(t)\right] \qquad (3)$$

A "esperança" em (3) nada mais é do que a média dos valores possíveis ponderada por sua probabilidade de ocorrência. Em particular, no caso de interesse dos futuros de taxas de juros, o fator de desconto já está incluído nos preços, assim (3) colapsa para:

$$V_0 = q \times V_1 + (1-q) \times V_2;\ V_1 < V_0 < V_2 \qquad (4)$$

Portanto, a probabilidade "risk-neutral" é:

$$q = \frac{V_0 - V_2}{V_1 - V_2} \qquad (5)$$

Ocorre que o mundo físico não é neutro ao risco, e é necessário reconciliar as chances do mundo neutro ao risco e do mundo físico. Visando tal reconciliação, *assume-se* que há um prêmio pelo risco(no mundo físico)que é proporcional à volatilidade:

$$\sigma^2 = (V_1 - V_2)^2 \times p \times (1-p) \qquad (6)$$

$$\delta = \lambda \times \sigma \qquad (7)$$

Em (6), "p" é a medida objetiva de probabilidade e "λ" corresponde ao "Market price of risk", ou seja, a razão entre prêmio (δ) e volatilidade (σ). O preço de mercado é único. Assim reescrevendo (4) para incluir o prêmio pelo risco na nova medida de probabilidade:

$$V_0 = p \times V_1 + (1-p) \times V_2 - \delta \qquad (8)$$

Em outros termos, (8) diz que o preço de Mercado já contém um desconto correspondente ao prêmio pelo risco mencionado.

Substituindo (4) e (7) em (8) e rearranjando:

$$q = p - \lambda\sqrt{p(1-p)} \quad (9)$$

Desse modo, quando o “preço de Mercado do risco”, $\lambda$, é positivo, (9) implica que a probabilidade objetiva, p, é maior do que a “Risk-neutral”, exceto para os valores 0 e 1, porque há (ou deveria haver) um prêmio positivo por correr tal risco.

Resolvendo-se (9) para a medida p:

$$p = \frac{2q+\lambda^2 \mp \lambda\sqrt{(\lambda^2+4q-4q^2)}}{2(1+\lambda^2)} \quad (10)$$

Em (10), o sinal é o mesmo que o de λ.

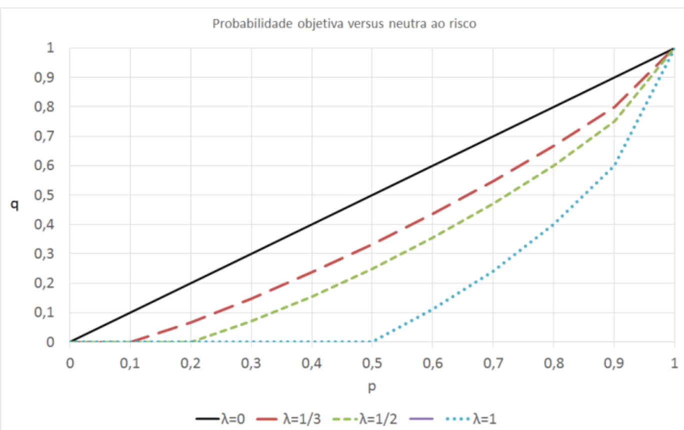


Figura 2: Medidas de probabilidade, p x q

No atual momento, a meta SELIC é 14%. A taxa CDI, porém, geralmente apresenta um “descolamento”, valendo menos do que a taxa-base. Atualmente, tal descolamento é da ordem de 0,12%, ou seja, o CDI é 13,88% ao ano.

Para exemplificar, considere-se o contrato Janeiro 17, DI1F17, cuja taxa era 13,74% a 41 dias úteis do vencimento e a 11 da reunião do COPOM. Considerando-se as taxas e substituindo em (2):

$$j_1 = \frac{(1+13{,}74\%)^{\frac{41}{41-11}}}{(1+13{,}88\%)^{\frac{11}{41-11}}} - 1 = 13{,}68\% \quad (11)$$

Portanto, a taxa CDI implícita no período é de 13,68% e, adicionando o descolamento, a Selic implícita correspondente é de 13,80%.

Os referidos contratos DI têm um valor que se relaciona à taxa de juro, para o prazo “t”, em dias úteis, até o vencimento, através da relação:

$$Preço(t, j) = \frac{100000}{(1+j)^{\frac{t}{252}}} \quad (12)$$

Assim, tanto faz se falar em taxa ou em “PU”(preço) para o referido contrato, são conceitos equivalentes. Para o contrato considerado, tal valor é de 97927.

Retomando o modelo binário apresentado na Figura 1, e, *arbitrariamente*, assumindo que na próxima reunião do COPOM, ou a taxa básica permanecerá em 14% ao ano ou será reduzida a 13,50%: usando (1), se não houver alteração na taxa-base, então a taxa no período seria 13,88%, e de (12) o preço correspondente 97908; se houver uma queda de 0,50%, então a taxa seria 13,514%, preço 97959. Substituindo-se os preços obtidos (5):

$$q = \frac{97927-97959}{97908-97959} = \frac{-32}{-51} \approx 0{,}63 \quad (13)$$

O resultado (13) implica que a probabilidade neutra ao risco para a decisão 1(manter a taxa), dados os preços, é 0,63. Observando-se a Figura 2 ou usando

(10), para $\lambda$ entre $0$ e $1$, a probabilidade objetiva, $p$, está, grosso modo, entre 0,63 e 0,91 de que a taxa SELIC não se altere.

Se, por outro lado, as opções forem entre 0 e 0,25%, então:

$$q = \frac{97927-97933}{97908-97933} = \frac{-6}{-25} = 0{,}24 \quad (13)$$

Em que 97933 é o preço do contrato para uma taxa de 13,70% no período. Novamente, da Figura 2 ou usando (10), para $\lambda$ entre $0$ e $1$, a probabilidade objetiva, $p$, estará entre 0,24 e 0,70 de que a taxa SELIC não se altere.

## Considerações

Para agentes que atuem em mercados derivativos, entender o que está nos preços e comparar às próprias expectativas/convicções no nível de probabilidade objetiva (ou do mundo físico) é relevante. Adicionalmente, os preços de mercado também podem ser usados para se estimar o quanto o mercado remunera por unidade de risco (λ*), para uma dada aposta quanto às possíveis decisões numa reunião do COPOM de interesse.

Há subjetividade no contexto aqui delineado, quando se fala de probabilidades implícitas, haja vista as mesmas serem condicionais tanto ao modelo para a variável aleatória como aos próprios limites arbitrados (ou 0,50% ou 0,25% no exemplo explorado); de todo modo, para o contrato em questão, pode-se dizer que, mesmo considerando 0 ou 0,25%, na medida objetiva, o mercado está dividido entre não alterar a taxa ou reduzi-la de 0,25%... será que há um prêmio aí?

## Referências

BLACK,F.; SCHOLES,M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities;*The Journal of Political Economics*;81(3);pp. 637:654;1973.

SHREVE, Stephen E.: *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*;2ed.; Springer;NY;NY;2003.

SILVA,M.E.: Probabilidades de Mudanças na Meta de Taxas de Juros do COPOM Implícitas no DI-Futuro. Temas de Economia Aplicada;Fipe;Junho;2016.

## Notas

[1]Roberto Cintra é pesquisador do GV Invest – FGV/EESP e professor convidado do Mestrado Profissionalizante em Economia – Finanças Quantitativas.

[2]A rigor, a taxa SELIC é a taxa livre de risco, mas o passivo nos mercados futuros domésticos é o CDI acumulado.

[3]Outras possíveis abordagens para a variável aleatória, que não a Bernoulli, são possíveis, dependendo do objetivo.