GV INVEST | 08

Apreçamento de Renda Variável usando abordagem não-determinística

Aplicando-se uma abordagem não determinística para se separar as parcelas de curto e longo prazos na definição do preço da ação, conclui-se que a taxa de desconto é de fundamental relevância, vinculando Renda Fixa e Renda variável

Abril de 2017

Roberto Cintra[1]

Introdução

Há quantidade significativa de ações de diferentes empresas negociadas em Bolsa — centenas no mercado brasileiro e milhares no americano —, cada uma com sua história peculiar, algumas empresas passando por dificuldades enquanto outras lucrando significativamente; adicionalmente, há uma infinidade de setores representados, cada qual com suas particularidades. Tal diversidade de componentes pode induzir à conclusão de que há diferenças relevantes no modo como se obtém o preço "justo" de cada ação, levando, em consequência, a uma grande quantidade de modelos de "valuation".

Apesar desse espectro de possibilidades, cada uma das ações pode ser interpretada como o valor presente de uma série infinita de fluxos de caixa que a propriedade daquele ativo (a ação) dá como direito. Assim, num caso extremo, se uma ação nunca produzir um fluxo de caixa positivo ao seu detentor, terá o valor zero, para evitar a possibilidade de arbitragem.

O intuito desse short study é obter um modelo de valuation "universal" com base nas seguintes premissas:

1) Os fluxos de caixa futuros (aqui genericamente condensados sob o nome de dividendo) decorrentes da propriedade de uma ação são variáveis aleatórias (ou combinando tempo e aleatoriedade tem-se o processo estocástico);
2) Para simplificar, os fatores de descontos dos fluxos de caixas futuros são variáveis determinísticas;
3) O valor presente de qualquer ação é finito;

4) Todos os processos estocásticos envolvidos são considerados como processos de Itô.

Modelo

Seja o valor da ação correspondente ao valor presente de todos os fluxos futuros esperados:

$$V_{RV}(0) = E_0\left[D(t_1)e^{-j_1 t_1}\right] + E_0\left[D(t_2)e^{-j_2 t_2}\right] + \cdots + E_0\left[D(t_n)e^{-j_n t_n}\right] + \cdots \quad (1)$$

O valor de mercado acima, $V_{RV}(0)$, reflete os valores presentes das expectativas de fluxos de caixa futuros (dividendos!), sem prazo de vencimento, ou seja, a soma tem infinitos termos.

A presença da aleatoriedade em (1) impõe a necessidade de se trabalhar com "expectativas", não com "certezas" ou valores determinísticos.

A abordagem (1), implicitamente, traz certa simplificação porque considera eventos discretos. Não seria incorreto admitir que uma abordagem contínua também seria apropriada. Nesse contexto é que se desenvolvem os próximos parágrafos.

Um processo estocástico cuja dinâmica é um processo de Itô (Oksendal,2003; Karatzas e Shreve, 1991), tem a seguinte representação (também conhecida por equação diferencial estocástica):

$$dX_t = a(X_t,t)dt + b(X_t,t)dW_t \quad (2)$$

Se $g(t,x)$ é uma função de classe C^2, então a fórmula (ou lema) de Itô garante que $Y_t = g(t,X_t)$ é também um processo de Itô e sua dinâmica é dada por:

$$dY_t = \left[\frac{\partial g}{\partial t} + a(X_t,t)\frac{\partial g}{\partial X} + \frac{1}{2}[b(X_t,t)]^2\frac{\partial^2 g}{\partial X^2}\right]dt + \left[b(X_t,t)\frac{\partial g}{\partial X}\right]dW_t \quad (3)$$

Admitindo-se que o preço de uma ação é um processo estocástico (movimento browniano geométrico) cuja dinâmica é uma difusão de Itô então:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \quad (4)$$

Com:

S_t preço da ação em "t";

μ_t taxa de crescimento do valor da ação;

σ_t volatilidade do preço da ação;

W(t) um movimento browniano.

Usando a modelagem introduzida em (2) e (3) e assumindo que a dinâmica (4) é apropriada para representar o processo de formação do preço de uma ação, então, supondo-se*3 que $g(t,S_t) = ln(S_t)$, a partir de (3) e (4), sua variação é dada por:

$$dln(S_t) = \left[\frac{\partial ln(S_t)}{\partial t} + \frac{\mu_t S_t}{S_t} - \frac{1}{2}(\sigma_t S_t)^2\frac{1}{{S_t}^2}\right]dt + \sigma_t S_t\frac{1}{S_t}dW(t) = \left[\mu_t - \frac{1}{2}(\sigma_t)^2\right]dt + \sigma_t dW(t) \quad (5)$$

Assim, integrando-se (5):

$$ln\left(\frac{S_t}{S_{t_0}}\right) = \int_{t_0}^{t}\left[\mu_s - \frac{1}{2}(\sigma_s)^2\right]ds + \int_{t_0}^{t}\sigma_s dW(s) \quad (6)$$

A segunda integral do segundo termo em (6), quando W(t) é um movimento browniano, é conhecida como integral de Itô (Oksendal,2003) e é nela que residem as diferenças entre o cálculo determinístico e o cálculo estocástico.

Equivalentemente:

$$S_t = S_{t_0} e^{\int_{t_0}^{t}\left[\mu_s - \frac{1}{2}(\sigma_s)^2\right]ds + \int_{t_0}^{t}\sigma_s dW(s)} \qquad (7)$$

Isto é, o log de S_t é uma distribuição normal com média $\ln\left(S_{t_0}\right) + \int_{t_0}^{t}\left[\mu_s - \frac{1}{2}(\sigma_s)^2\right]ds$ e variância $\left[\int_{t_0}^{t}\sigma_s dW(s)\right]^2 = \int_{t_0}^{t}(\sigma_s)^2 ds$. Quando os valores são constantes, então, obviamente, a média é $\ln\left(S_{t_0}\right) + \left[\bar{\mu} - \frac{1}{2}(\bar{\sigma})^2\right](t - t_0)$ e a variância é $(\bar{\sigma})^2(t - t_0)$.

A Esperança de (7) é:

$$E[S_t] = S_{t_0} E\left\{e^{\int_{t_0}^{t}\left[\mu_s - \frac{1}{2}(\sigma_s)^2\right]ds + \int_{t_0}^{t}\sigma_s dW(s)}\right\} =$$

$$S_{t_0} e^{\int_{t_0}^{t}\left[\mu_s - \frac{1}{2}(\sigma_s)^2\right]ds} E\left\{e^{\int_{t_0}^{t}\sigma_s dW(s)}\right\} = S_{t_0} e^{\int_{t_0}^{t}\mu_s ds} \qquad (8)$$

O resultado (8) é porque para uma lognormal o valor esperado é $E[X] = e^{\mu_X + \frac{1}{2}\sigma^2}$, deste modo $E\left\{e^{\int_{t_0}^{t}\sigma_s dW(s)}\right\} = e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\sigma_s^2 ds}$

Em outros termos, (8) implica que para projetarmos o futuro, pode-se apenas contar com a porção determinística do modelo.

Para se calcular o valor presente dos fluxos de caixa futuros, o interesse é nos dividendos e não no valor da ação em si. Desse modo, assumindo-se que o dividendo é proporcional ao preço da ação, uma fração de seu valor presente é dada por:

$$dVP(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} y_s ds} dD(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} y_s ds}\alpha(t) S_t dt \quad (9)$$

A equação, portanto, é a integral de (8) para o período todo (admitindo que $t_0 = 0$):

$$VP = E\left[\int_0^{\infty} e^{-\int_0^{u} y_s ds}\alpha(u) S_u du\right] =$$

$$\int_0^{\infty}\alpha(u) E\left[S_u e^{-\int_0^{u} y_s ds}\right] du = \int_0^{\infty}\alpha(u) S_{t_0} e^{\int_0^{u}(\mu_s - y_s)ds} du \qquad (10)$$

Supondo que há um transiente e que após o mesmo, as funções fiquem constantes:

$$\begin{aligned} VP &= \int_0^{\infty}\alpha(u) S_{t_0} e^{\int_0^{u}(\mu_s - y_s)ds} du \\ &= \int_0^{t^*}\alpha(u) S_{t_0} e^{\int_0^{u}(\mu_s - y_s)ds} du \\ &\quad + \bar{\alpha} S_{t_0}\int_{t^*}^{\infty} e^{(\bar{\mu} - \bar{y})u} du \\ &= \int_0^{t^*}\alpha(u) S_{t_0} e^{\int_0^{u}(\mu_s - y_s)ds} du \\ &\quad + \frac{\bar{\alpha} S_{t_0}}{(\bar{y} - \bar{\mu})} e^{(\bar{\mu} - \bar{y})t^*}; com\ \bar{y} > \bar{\mu} \end{aligned} \qquad (11)$$

Por exemplo, admitindo-se um prazo t^* de 10 anos, um crescimento de 3% e juro real mais spread de 10%, com dividend yield de 5% então:

$$\frac{\bar{\alpha}S_{t_0}}{(\bar{y}-\bar{\mu})}e^{(\bar{\mu}-\bar{y})t^*} = \frac{5\%\ S_{t_0}}{(10\%-3\%)}e^{(3\%-10\%)10}$$
$$\approx 35\%\ S_{t_0}$$

Para tais valores, portanto, 65% do valor presente (preço da ação) dependeria da expectativa referente aos 10 primeiros anos.

Na realidade, fixado um prazo, a função "valor da perpetuidade":

$$f(\bar{\alpha},\bar{\mu},\bar{y}) = \frac{\bar{\alpha}}{(\bar{y}-\bar{\mu})}e^{-(\bar{y}-\bar{\mu})t^*} = \frac{\bar{\alpha}}{z}e^{-zt^*} \qquad (12)$$

Uma outra situação seria a de uma empresa que paga um spread menor e o juro real mais spread valem 8%, então:

$$f(5\%,3\%,8\%) = \frac{5\%}{5\%}e^{-5\%*10} \approx 61\%$$

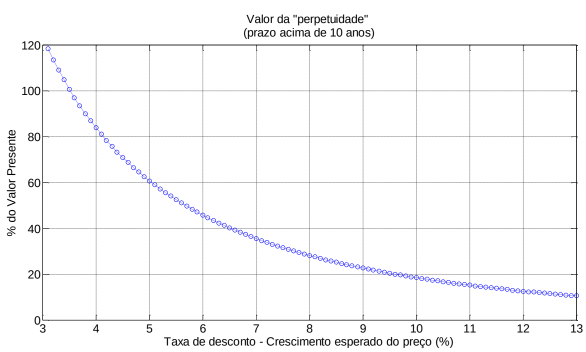

Figura 1: Valor da perpetuidade X diferencial de taxas de desconto e crescimento

A principal conclusão desta análise estilizada é que quanto maior a diferença entre a taxa de desconto e a de crescimento do dividendo (ou do lucro...) mais relevante é o curto prazo para o preço da ação.

Considerando apenas a taxa de desconto, esta é uma combinação da taxa-base da economia (livre de risco) e um prêmio pelo risco de crédito. Assim, quanto maior o risco percebido, maior será a taxa de desconto e, assim, maior o domínio do curto sobre o longo prazo na determinação do preço da ação.

Considerações Finais

Esse estudo é a primeira parte de uma análise integrada de Renda Fixa e Renda Variável. Nesse primeiro estudo, a partir do modelo tradicional de apreçamento de uma ação para fins de modelagem de derivativos, tomou-se a vertente da análise do preço da ação em si, seus fatores determinantes bem como a separação entre uma parcela de curto e longo prazos.

A partir dos resultados, pode-se questionar o dito de que "o valor da ação está no longo prazo" ... nem sempre é verdade.

Como ficou explícito no resultado (11), o vínculo entre Renda Fixa e Variável é tanto maior quanto maior a percepção de risco, que movimenta as taxas de desconto e, deste modo, desloca a definição do preço da ação do curto para o longo prazo e vice-versa. O propósito de escrever esse estudo foi colocar alguma luz na distinção de apreçamento entre ativos de Renda Fixa e Variável.

Referências

OKSENDAL, Bernt; Stochastic Differential Equations: an introduction with applications; 6ed.; *Springer*;Blindern;2003.

KARATZAS, I.; SHREVE, S.E.: Brownian Motion and Stochastic Calculus;2ed.; Springer;NY;NY;1991.

Notas

[1]Roberto Cintra é pesquisador do GV Invest – FGV/EESP e professor convidado do Mestrado Profissionalizante em Economia – Finanças Quantitativas.

[*3] Esse "truque" de usar o logaritmo é muito conveniente porque proporciona o cálculo direto do retorno logarítmico.