Métodos Lineares para Estimação dos Parâmetros no Modelo Nelson-Siegel

Neste artigo são apresentados alguns métodos que valorizam a interpretação econômica dos parâmetros no modelo Nelson-Siegel e que são especialmente úteis ao trabalhar com a evolução desses parâmetros no tempo

Agosto, 2017

Ulisses Nehmi[1]

Introdução

A representação da Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ) por uma curva paramétrica é muito relevante nos estudos sobre renda fixa. A pesquisa de Nelson e Siegel (1987) resultou na proposição de uma nova classe de modelos com essa finalidade. Assim, definidos os 4 parâmetros do modelo em uma dada data, é possível determinar a taxa de juros spot para qualquer prazo.

O modelo proposto é robusto o suficiente para representar curvas de vários formatos, como mostra a Fig. 1 para diferentes valores dos parâmetros[2]: monotônica, plana, com corcova ou em formato de S, normal ou invertida.

Um desafio para o modelo é a estimação dos parâmetros com base nos dados para uma determinada data. De métodos mais simples a mais complexos, a escolha adequada depende do objetivo perseguido: obter a curva com menor erro em relação aos dados em uma data ou avaliar o comportamento dos parâmetros no tempo. É uma questão de otimização estática ou dinâmica.

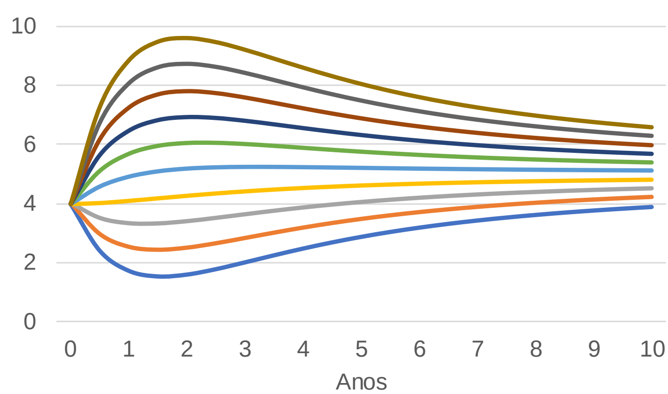

Fig. 1 – Exemplos de formatos de curva admitidos pelo modelo

Interpretando o Modelo Nelson-Siegel

O modelo (1) proposto por Nelson e Siegel (1987) para representar a taxa spot y para um prazo t conta com os parâmetros b_1, b_2, b_3 e τ.

$$y(t) = b_1 + b_2 \cdot \frac{\left[1-e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]}{\left(\frac{t}{\tau}\right)} - b_3 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \qquad (1)$$

Na interpretação original, os parâmetros b_1, b_2 e b_3 estão relacionados com o longo, curto e médio prazo, respectivamente. Também vale notar que estes parâmetros não são ortogonais entre si. A Fig. 2 mostra o comportamento dos coeficientes destes parâmetros no modelo (1). De fato, observa-se que o parâmetro de longo prazo é constante e não decai para zero no limite, que o parâmetro de curto prazo rapidamente converge para zero, e que o parâmetro de médio prazo começa em zero e decai novamente para zero no limite. O parâmetro τ está relacionado com o prazo t no qual o coeficiente de b_3 atinge seu máximo.

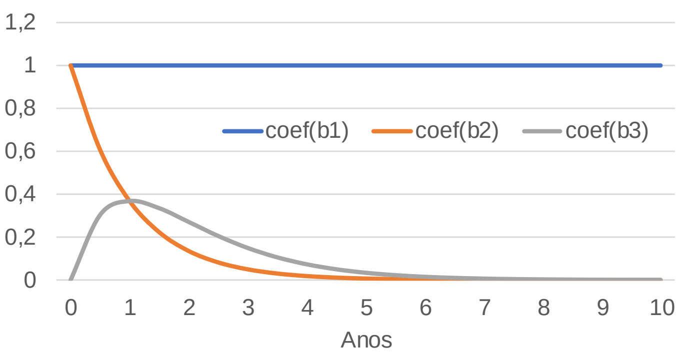

Fig. 2 – Comportamento dos coeficientes no modelo

Este modelo ganhou popularidade rapidamente, e Svensson (1994) adicionou dois novos parâmetros[3]. O objetivo era dar flexibilidade ao modelo e reduzir o erro em relação aos dados para uma determinada data[4]. A inclusão destes novos parâmetros não estava ligada a uma interpretação econômica clara.

Avançando em outa direção, Diebold e Li (2006) tinham interesse em fazer previsões do comportamento dos parâmetros no tempo. Neste caso, não basta a minimização do erro: é necessário manter a interpretação econômica dos parâmetros. Com pequenos ajustes algébricos no modelo original ($b_1 = \beta_1$, $b_2 = \beta_2 + \beta_3$, $b_3 = \beta_3$ e $\tau = \frac{1}{\lambda}$), chegaram em uma nova forma:

$$y(t) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \left(\frac{1-e^{-\lambda \cdot t}}{\lambda \cdot t}\right) + \beta_3 \cdot \left(\frac{1-e^{-\lambda \cdot t}}{\lambda \cdot t} - e^{-\lambda \cdot t}\right) \qquad (2)$$

Embora aparentemente mais complexa, com base no trabalho de Litterman e Scheinkman (1991) os parâmetros passaram a ter uma interpretação econômica mais clara. Assim, concluiu-se que β_1, β_2 e β_3 representam, respectivamente, nível, inclinação e curvatura. O parâmetro λ está relacionado com o prazo t no qual o coeficiente de β_3 atinge seu máximo.

Estimação dos Parâmetros

O modelo Nelson-Siegel é linear em β_1, β_2 e β_3, mas é não-linear em λ. Assim, numa primeira análise a conclusão é pela necessidade de um método de estimação não-linear.

Os métodos não-lineares têm uma série de limitações conhecidas, como eventuais mínimos/máximos locais, dificuldade de convergência, dificuldade de replicação, entre outros. Um problema especialmente relevante para o objetivo deste trabalho é obter valores para os parâmetros que não tenham uma interpretação econômica adequada, embora satisfaçam as condições de otimização.

Para fugir dos métodos não-lineares, um artifício possível é fixar o valor de λ. Com isso, o modelo passa a ser linear, permitindo métodos como a resolução de um sistema de equações ou Mínimos Quadrados Ordinários (MQO).

Diebold e Li (2006) argumentam que o coeficiente do parâmetro β_3 geralmente atinge seu máximo entre 2 e 3 anos, e escolheram trabalhar com um valor fixo para o λ. Derivando o coeficiente de β_3 em (2) e trabalhando com a suposição de que esse ponto de máximo ocorre em 2,5 anos, então chega-se em $\lambda = 0{,}71731$.

O método mais simples para estimar os parâmetros é resolver um sistema de equações. Para ilustrar, vamos supor que estejam disponíveis os dados de taxa de juros para 0,5, 1, 2, 3, 5 e 10 anos em uma dada data. Assim, pode-se definir que a taxa de 10 anos, por ser o prazo mais longo disponível, corresponde ao nível e, portanto, a β_1. De fato, para este prazo os coeficientes dos outros parâmetros são muito pequenos. Em seguida, pode-se definir a inclinação como diferença entre a taxa de 10 anos e de 0,5 ano, ou $y(10) - y(0{,}5)$, e a curvatura como $y(10) + y(0{,}5) - 2 \cdot y(3)$. Resolvendo o sistema, encontram-se os valores de β_2 e β_3.

A principal vantagem deste método é sua simplicidade. As duas principais desvantagens são o fato de necessariamente utilizar-se das taxas para os 3 prazos utilizados na definição de nível, inclinação e curvatura, e de desconsiderar os demais pontos da curva para parametrizá-la, podendo resultar em erros maiores do que outros métodos.

O método MQO também pode ser utilizado. Neste caso, as taxas de juros disponíveis para todos os prazos são relevantes. Sua aplicação é bem conhecida, e entre suas principais vantagens estão a utilização de todos os dados disponíveis, minimizando o erro, e robustez no caso de falta de dados em alguns pontos.

Em geral, os resultados destes dois métodos são semelhantes.

Um terceiro método para estimação dos parâmetros não necessita que λ seja fixo como nos casos anteriores, e é conhecido como *grid search*. Este método sistematiza o uso do MQO com uma gama de valores de λ possíveis, e ao final escolhe o conjunto de parâmetros $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda)$ com o menor erro para uma data.

Para definir os valores de λ possíveis, procede-se de forma parecida com a obtenção do valor de λ fixo utilizada anteriormente. No entanto, ao invés de definir $t = 2{,}5$, pode-se utilizar t variando de 0,5 em 0,5 ano, de 0,5 a 10 anos, por exemplo. Assim obtém-se o valor de λ para o ponto de máximo do coeficiente β_3 igual a cada t. Em seguida, aplica-se um MQO para cada valor de λ.

Uma das principais vantagens deste método sobre outros não-lineares é a preservação da interpretação econômica de boa parte dos casos. Além disso, uma possível aplicação deste método é determinar o valor médio de λ, para validar o valor fixo utilizado em conjunto com os dois primeiros métodos lineares apresentados.

Embora não com esta nomenclatura, Nelson e Siegel (1987) já empregaram o *grid search* em seu trabalho, e ao final compararam os parâmetros encontrados com um valor fixo para λ que era exatamente a mediana dos valores de λ para o período de estudo.

Conclusão

A utilização de curvas parametrizadas para representar a ETTJ é muito rica, mas exige atenção na escolha do método de estimação dos parâmetros.

Caso o único objetivo seja a minimização dos erros, muitos métodos, lineares ou não-lineares, podem ser empregados. Pode até ser o caso de utilizar modelos ajustados para esta finalidade.

No entanto, se além da minimização do erro o objetivo for estudar o comportamento dos parâmetros no tempo, métodos lineares que preservem a interpretação econômica adequada dos parâmetros devem ser empregados.

Além de explorar algumas das principais vantagens e desvantagens de cada método, foi apresentada uma aplicação que pode auxiliar na determinação de um valor fixo λ, permitindo o emprego de outros métodos lineares mais simples para a obtenção dos parâmetros num modelo Nelson-Siegel.

Bibliografia

ANBIMA: Estrutura a Termo das Taxas de Juros Estimada e Inflação Implícita Metodologia; 2010.

DIEBOLD, F. X.; LI, C.: Forecasting the term structure of government bond yields; *Journal of Econometrics*; 2006.

LITTERMAN, R.; SCHEINKMAN, J.: Common factors affecting bond returns; *The Journal of Fixed Income*; 1991.

NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F.: Parsimonious modeling of Yield Curves; *The Journal of Business*; 1987.

SVENSSON, L. E. O.: Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994; *NBER Working Paper No. 4871*; 1994.

Notas

[1] Ulisses Nehmi, GV-Invest, FGV/EESP.

[2] Dos termos em inglês: *monotonic, flat, humped* e *S-shaped*.

[3] O modelo proposto por Svensson (1994) é $y(t) =$

$$b_1 + (b_2 + b_3) \cdot \frac{\left[1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)}\right]}{\left(\frac{t}{\tau}\right)} - b_3 \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + b_4 \cdot \frac{t}{\tau_2} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau_2}\right)} \quad ,$$

no qual são adicionais os parâmetros b_4 e τ_2.

[4] É nesta categoria que se encontra a metodologia utilizada por diversas associações e bancos centrais. No Brasil, a ANBIMA utiliza o modelo de Svensson para representação parametrizada das curvas de juros.